2. Mathematik-Schularbeit für die 6. Klasse Autor: Gottfried Gurtner

Arbeitszeit: 100 Minuten

Lernstoff:

Mathematische Grundkompetenzen:

AG2.1, AG2.2, AG2.3

FA1.1, FA1.5, FA1.6, FA1.7, FA1.9

FA2.1, FA2.2, FA2.3, FA2.4, FA2.5, FA2.6

FA3.4

Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$ oder mit $f(x) = a \cdot x^{1/2} + b$:

FA3.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA3.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter *a* und *b* ermitteln und im Kontext deuten können

FA3.3 Die Wirkung der Parameter *a* und *b* kennen und die Parameter im Kontext deuten können

Exponentialfunktion [$f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$] :

FA5.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA5.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA5.3 Die Wirkung der Parameter *a* und *b* (bzw. e^{λ}) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können

FA5.4 Charakteristische Eigenschaften ($f(x + 1) = b \cdot f(x)$ kennen und im Kontext deuten können

FA5.5 Die Begriffe *Halbwertszeit* und *Verdoppelungszeit* kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können

FA5.6 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können

Beschreibende Statistik:

WS1.1 Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können

WS1.2 Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können

WS1.3 Statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus; Quartile; Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können

WS1.4 Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können

Weitere Kompetenzen laut Lehrplan:

Zinseszinsrechnung in Anwendungssituationen einsetzen können
Aufzinsen und Abzinsen von Geldbeträgen zum Vergleich von Zahlungsangeboten einsetzen können
Rentenrechnung in Anwendungssituationen einsetzen können

I) Mathematische Grundkompetenzen

1) Vereinfache so weit wie möglich und schreibe das Ergebnis mit positiven Exponenten an! / 2 P

i) $x^3 \cdot \left(2x^2\right)^{-3} =$

ii) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} =$

2) Gegeben ist eine lineare Funktion mit der Gleichung $f\left(x\right) = k \cdot x + d$ mit $k,\ d \in \mathbb{R}$.
Ergänze in den Lücken die Bedingungen < 0, = 0 oder > 0, sodass gilt, dass der Graph von f / 2 P

i) ausschließlich im 1. und 2. Quadranten des Koordinatensystems verläuft!

k _____ und d _____

ii) ausschließlich im 1., 3. und 4. Quadranten des Koordinatensystems verläuft!

k _____ und d _____

3) Löse folgende Gleichungen! / 2 P

i) $a^2 = 6a$

ii) $2^y = \frac{1}{8}$

4) Gegeben sind jeweils drei Funktionswerte der Funktionen e, f, g und h.

x	$e(x)$
0	3
1	5
2	8

x	$f(x)$
1	7
3	4
5	1

x	$g(x)$
1	20
2	10
4	5

x	$h(x)$
1	5
2	10
4	20

Gib an, welche dieser Funktionen / 2 P

i) einen direkt proportionalen Zusammenhang beschreiben können: ____________

ii) einen indirekt proportionalen Zusammenhang beschreiben können: ____________

5) Gib jeweils die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion f an (t in Tagen), für die gilt:

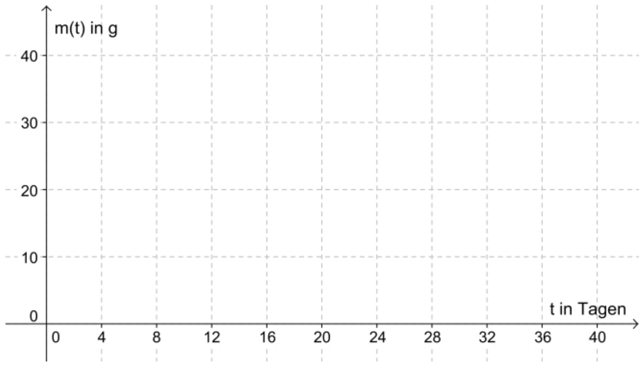
i) Die Funktionswerte nehmen täglich um 4 % ab: _________________________ / 2 P

ii) Der Graph von f verläuft durch den Punkt $P = (0|3)$ und die Funktionswerte nehmen pro Tag um 8 % zu: _______________________

6) Gegeben sind fünf Funktionsgleichungen. Welche davon beschreiben eine exponentielle Abnahme?
Kreuze die zutreffende(n) Funktionsgleichung(en) an! / 2 P

□ $f(x) = 0{,}9 \cdot 1{,}02^x$ □ $g(x) = 1{,}02 \cdot 0{,}9^x$ □ $h(t) = 0{,}8 \cdot e^{0{,}2 \cdot t}$ □ $N(t) = 2 \cdot e^{-3 \cdot t}$ □ $y(x) = 1 - e \cdot x$

7) Ein radioaktives Element X zerfällt mit einer Halbwertszeit von 8 Tagen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind 40 g des radioaktiven Elements vorhanden. Die Funktion m beschreibt die zum Zeitpunkt t noch vorhandene Menge von X. Skizziere im rechts gegebenen Koordinatensystem den Graphen von m. / 2 P



8) Gegeben ist die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.
Vervollständige den Satz durch Ankreuzen der richtigen Textbausteine so, dass er mathematisch korrekt ist!

g ist eine _____①_____ und es gilt ______②______ . / 2 P

	①
□	lineare Funktion
□	quadratische Funktion
□	Exponentialfunktion

	②
□	$g(x+2) = g(x) \cdot 2a$
□	$g(x+2) = g(x) \cdot a^2$
□	$g(x+2) = g(x) + 2a$

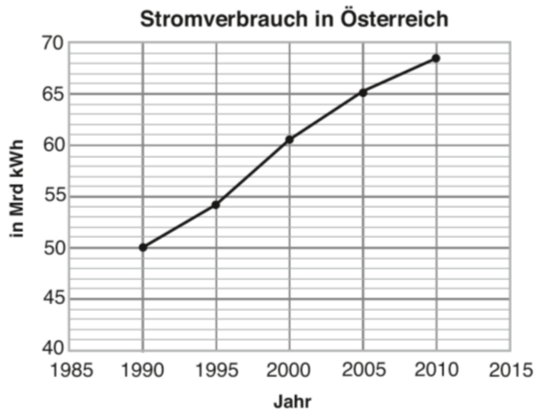
9) Eine Viruserkrankung breitet sich sehr schnell aus. Die Anzahl der Infizierten verdoppelt sich alle vier Tage. / 2 P

i) Breitet sich diese Viruserkrankung linear oder exponentiell aus? Begründe deine Antwort!

ii) Berechne, um wie viele Prozent die Anzahl der Infizierten pro Tag zunimmt!

10) In nebenstehender Abbildung wird der Stromverbrauch in Österreich im Zeitraum von 1990 bis 2010 dargestellt. / 2 P

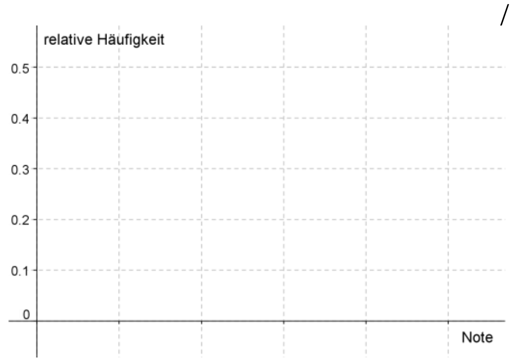
i) Berechne den prozentuellen Anstieg des Stromverbrauchs in Österreich von 2000 bis 2010.



ii) Begründe, warum die Abbildung einen falschen Eindruck bezüglich der Entwicklung des Stromverbrauchs in Österreich erwecken kann und wie dies vermieden werden könnte.

11) Die Tabelle zeigt das Ergebnis einer Schularbeit. / 2 P
Erstelle in der gegebenen Vorlage ein Säulendiagramm, das die relativen Häufigkeiten der Noten darstellt!

Note	1	2	3	4	5
Anzahl	2	5	8	4	1
relative Häufigkeit					



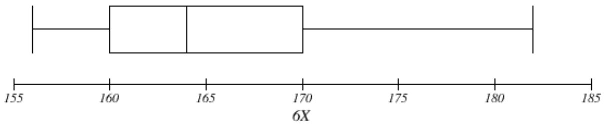
12) Gegeben ist die Datenliste 4, 6, 7, 3, 8, 12, 10, 15, 19, 16.

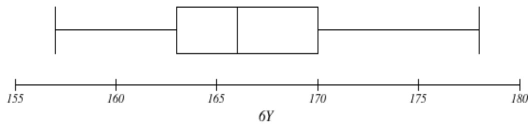
i) Bestimme folgende statistischen Kennzahlen der gegebenen Liste! / 2 P

Arithmetisches Mittel: ________ Median: ________

ii) Ändere zwei Werte der Liste so ab, dass das arithmetische Mittel gleich bleibt und der Median größer wird! ____

13) Die Abbildungen zeigen zwei Boxplots, in denen die Körpergrößen (in cm) der Schüler/innen der Klassen 6X und 6Y dargestellt sind. In beiden Klassen sind 20 Schüler/innen. / 2 P





i) Ermittle die mittlere Körpergröße der Schüler/innen der beiden Klassen!

6X: ________ 6Y: ________

ii) Welche der folgenden Aussagen sind sicher richtig?
Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an!

- ☐ In der 6X sind drei Viertel der Schüler/innen mindestens 160 cm groß.
- ☐ In der 6X sind mehr Schüler/innen größer als 170 cm als in der 6Y.
- ☐ Es gibt in der 6X eine Schülerin/einen Schüler, die/der 175 cm groß ist.
- ☐ Die kleinste Schülerin/Der kleinste Schüler der beiden Klassen besucht die 6X.
- ☐ In der 6Y ist 166 cm die häufigste Körpergröße.

14) In einem Betrieb arbeiten 15 Angestellte mit den Monatseinkommen $e_1, \dots, e_{15}$.
Das arithmetische Mittel ihrer Monatseinkommen beträgt 1950 Euro. / 2 P

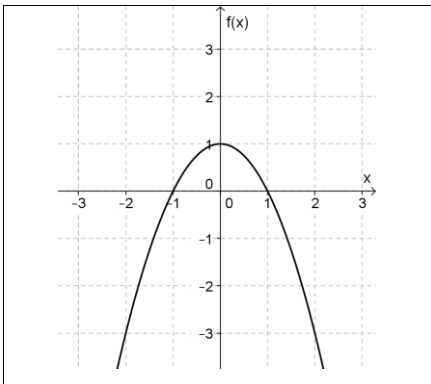
i) Gib einen Term an, mit dem die Standardabweichung der Monatseinkommen der 15 Angestellten berechnet werden kann!

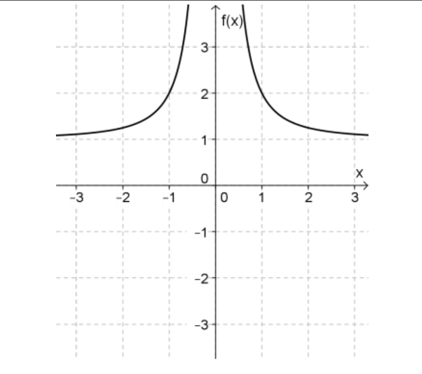
ii) Es wird ein zusätzlicher Mitarbeiter mit einem Monatseinkommen von 2110 Euro angestellt. Berechne das neue arithmetische Mittel der Monatseinkommen aller Angestellten!

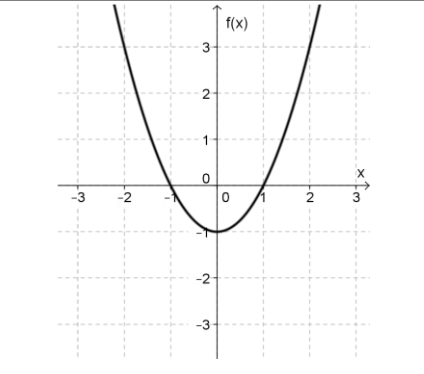
Zwischensumme: _____ / 28 P

II) Vernetzung von Grundkompetenzen und weitere Kompetenzen laut Lehrplan

1) Gegeben sind drei Graphen A, B, C. Kreuze in der Tabelle für jeden Graphen an, welche Bedingungen für die Parameter *a*, *b*, *z* erfüllt sein müssen, damit der Graph der Funktion $f(x) = a \cdot x^z + b$ den dargestellten Verlauf besitzt! / 2 P







A					**B**					**C**				
	-2	-1	1	2		-2	-1	1	2		-2	-1	1	2
$a =$	□	□	□	□	$a =$	□	□	□	□	$a =$	□	□	□	□
$b =$	□	□	□	□	$b =$	□	□	□	□	$b =$	□	□	□	□
$z =$	□	□	□	□	$z =$	□	□	□	□	$z =$	□	□	□	□

2) Radioaktive Zerfallsvorgänge verlaufen nach den Gesetzmäßigkeiten von exponentiellen Änderungen. Radioaktiver Kohlenstoff (^{14}C) besitzt eine Halbwertszeit von ca. 5730 Jahren.

i) Berechne, welcher Prozentsatz der vorhandenen Menge ^{14}C pro Jahr zerfällt! / 1 P

ii) Berechne, welcher Prozentsatz der Ausgangsmenge nach 10 000 Jahren noch vorhanden ist! / 1 P

iii) In einem Skelettknochen, der bei Ausgrabungsarbeiten gefunden wurde, sind noch 67 % der ursprünglichen ^{14}C-Menge enthalten. Berechne das Alter des Knochens! / 1 P

iv) Um die ^{14}C-Methode zur Altersbestimmung anwenden zu können, muss noch mindestens $\frac{1}{1000}$ der Ausgangsmenge an ^{14}C in der Probe enthalten sein.
Berechne, wie viele Halbwertszeiten maximal vergangen sein dürfen, damit die ^{14}C-Methode noch anwendbar ist! / 1 P

3) Team A und Team B erzielten beim Sporttag die folgenden Ergebnisse im Weitsprung.
(Jede Schülerin/Jeder Schüler durfte einmal springen.)

Team A: 4,31 m; 3,81 m; 4,14 m; 4,10 m; 4,57 m; 3,97 m

Team B: 3,98 m; 4,23 m; 4,57 m; 3,93 m; 3,97 m; 4,26 m; 4,11 m;

i) Jede Klasse beansprucht den Sieg für sich.
Gib für jede Klasse eine mögliche Begründung an, warum sie gewonnen hat!
Verwende dabei statistische Kennzahlen! / 2 P

ii) Gib zwei statistische Darstellungsformen (Diagrammtypen) an, die zum Vergleich obiger Weitsprungergebnisse geeignet sind! / 1 P

iii) Ist allgemein die Spannweite oder die Standardabweichung das bessere Maß dafür, welches Team die „konstanteren" Leistungen erbracht hat? Begründe deine Antwort! / 1 P

4) Beim Kauf einer Eigentumswohnung im Wert von € 150 000 macht der Käufer eine Anzahlung von € 30 000 und zahlt den Rest in 20 gleichbleibenden Raten jeweils am Ende des Jahres.
Berechne die Höhe dieser Rate, wenn 4,5 % p.a. Zinsen vereinbart werden! / 2 P

Endwert einer vorschüssigen Rente: $K_n = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Endwert einer nachschüssigen Rente: $K_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Erreichte Punkte: ____ / 40 P Note: ______________________________

40-36 P: Sehr gut; 35-31 P: Gut; 30-25 P: Befriedigend; 24-20 P: Genügend; 19-0 P: Nicht genügend