Prototypische Schularbeit für die 8. Klasse (Autor: Gottfried Gurtner)

Lernstoff:

- Grundkompetenzen zu funktionalen Abhängigkeiten (FA1.1 – FA6.6) als Grundlage für die Differential- und Integralrechnung
- Grundkompetenzen zur Analysis (AN1.1 –AN4.3, außer AN4.1)
- Unter- und Obersummen

Da die Grundkompetenzen zu funktionalen Abhängigkeiten eine wichtige Grundlage für die Anwendung der Analysis in der 7. und 8. Klasse darstellen, ist das „Wachhalten“ dieses Wissens von großer Bedeutung.
In Teil 1 kommen allerdings nur Grundkompetenzen zur Analysis vor.
Im Hinblick auf Teil 2 wird vorausgesetzt, dass die Schüler/innen zum Zeitpunkt der Schularbeit mit den physikalischen Kontexten laut SRP-Konzept vertraut sind.

Gliederung:

Teil 1 besteht aus 13 Typ1-Aufgaben nach dem SRP-Konzept und einer Typ1-Aufgabe, die sich auf den restlichen Lehrplanstoff bezieht. Bei jeder dieser Aufgaben ist ein Grundkompetenzpunkt zu erreichen.

Teil 2 besteht aus zwei typ2-ähnlichen Aufgaben, in denen Grundkompetenzen in weniger vertrauten Situationen anzuwenden oder zu verknüpfen sind und Reflexionswissen nachzuweisen ist.
Jede dieser Aufgaben besteht aus voneinander unabhängigen Teilaufgaben mit meist zwei Aufgabenstellungen, die einen inhaltlichen Zusammenhang aufweisen. Bei den Teilaufgaben sind daher meist 2 Punkte zu erreichen.
Die mit $\boxed{\textbf{A}}$ gekennzeichneten Aufgabenstellungen in Teil 2 können im Hinblick auf eine positive Beurteilung zum Ausgleich von Fehlern in Teil 1 herangezogen werden. Es sind maximal drei „Ausgleichspunkte“ zu erreichen.

Hilfsmittel:

Erlaubt sind die im Unterricht üblichen Hilfsmittel.
Mindestanforderung: numerischer Taschenrechner und mathematische Formelsammlung

Arbeitszeit: 100 Minuten

Teil 1: 50 Minuten (wird vor Austeilen von Teil 2 abgesammelt)

Teil 2: 50 Minuten

Beurteilungsvorschlag:

Werden (inkl. der in Teil 2 erreichten „Ausgleichspunkte“) weniger als 9 Grundkompetenzpunkte erreicht, ist die Arbeit mit „Nicht Genügend“ zu beurteilen (unabhängig davon, wie viele Punkte insgesamt erreicht werden!).
Sobald (inkl. der „Ausgleichspunkte) mindestens 9 Grundkompetenzpunkte erreicht wurden, erfolgt die Beurteilung nach folgender Tabelle:

9 – 13 Punkte	Genügend
14 – 18 Punkte	Befriedigend
19 – 23 Punkte	Gut
24 – 28 Punkte	Sehr Gut

Teil 1

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Gleichung $f(x) = x^2 + 2$.
Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von *f* im Intervall [1; 3].

Aufgabe 2:

Von der Polynomfunktion *f* ist folgendes bekannt: $f(2) = 0$, $f'(2) = 0$ und $f''(2) = 1$.
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Textbausteine so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!
f hat an der Stelle ____①_____ sicher ____②_____ .

①	
$x = 0$	
$x = 1$	
$x = 2$	

②	
ein lokales Minimum	
ein lokales Maximum	
eine Wendestelle	

Aufgabe 3:

10 g radioaktives Jod zerfallen. Die nach *t* Tagen noch vorhandene Menge *m* an radioaktivem Jod wird mit der Gleichung $m(t) = 10 \cdot e^{-0{,}0866 \cdot t}$ beschrieben.
Berechnen Sie die Zerfallsgeschwindigkeit (= momentane Änderungsrate der vorhandenen Menge) des radioaktiven Jods nach 5 Tagen!

Aufgabe 4:

Gegeben sind die Funktion *g* und $a \in \mathbb{R}^+$.

Geben Sie eine geometrische Deutung an, was mit dem Ausdruck $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(a+h) - g(a)}{(a+h) - a}$ berechnet wird!

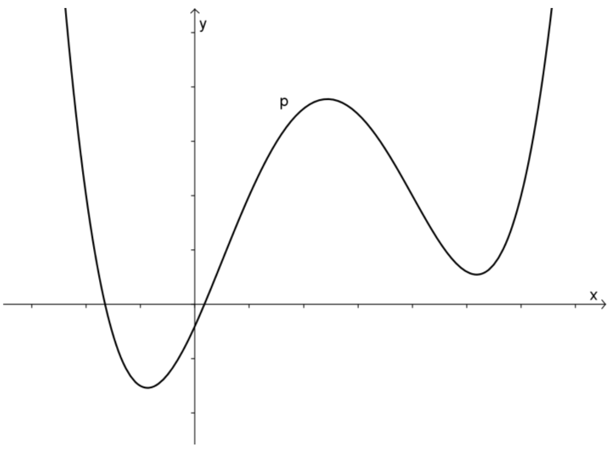
Aufgabe 5:

Gegeben sind differenzierbare Funktionen *f* und *g* und $a \in \mathbb{R}^+$.
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$[f(x) + a]' = f'(x) + a$	
$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$	
$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)$	
$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$	
$[f(a \cdot x)]' = a \cdot f'(x)$	

Aufgabe 6:

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion p vierten Grades.
Kennzeichnen Sie alle Stellen <u>auf der x-Achse</u>, für die $p''(x) = 0$ gilt!



Aufgabe 7:

Für welche der folgenden Funktionen gilt der Zusammenhang $f'(k \cdot x) = k \cdot f(k \cdot x)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$?
Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung an!

$f(x) = x$	
$f(x) = x^2$	
$f(x) = \sin(x)$	
$f(x) = e^x$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	

Aufgabe 8:

Gegeben sind die Funktionen f und g und die Konstante $a \in \mathbb{R}^+$. Es gilt der Zusammenhang $g'(x) = f(x)$.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

f ist eine Stammfunktion von g.	
g ist eine Stammfunktion von f.	
$g - a$ ist eine Stammfunktion von f.	
$f + a$ ist eine Stammfunktion von g.	
$a \cdot g$ ist eine Stammfunktion von f.	

Aufgabe 9:

Berechnen Sie $\int \left(ah^3 + a^2 \right) dh$.

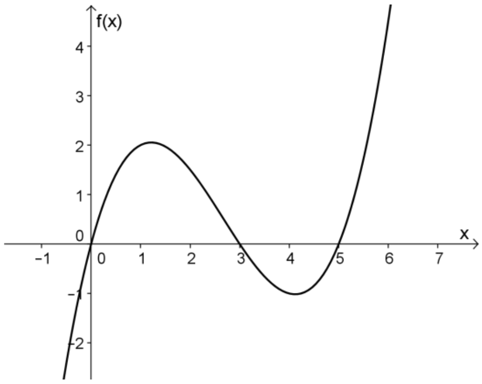
Aufgabe 10:

Um eine Stahlfeder aus der Ruhelage $x_0 = 0$ um x cm zu dehnen, ist die Kraft $F(x)$ erforderlich.

Geben Sie an, was in diesem Kontext mit dem Ausdruck $\int_0^8 F(x)dx$ berechnet wird!

Aufgabe 11:

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. A ist der Inhalt der Fläche, den f mit der x-Achse im Intervall [0; 5] einschließt.

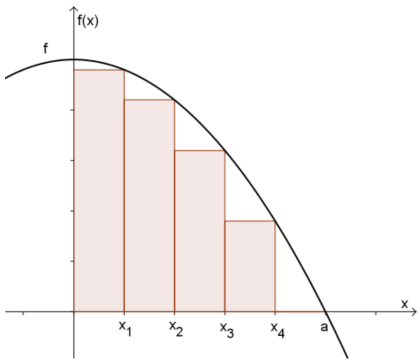


Mit welchen der folgenden Terme kann A berechnet werden?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Terme an!

$\int_0^5 f(x)dx$	
$\int_0^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$	
$\left\lvert \int_0^5 f(x)dx \right\rvert$	
$\int_0^3 f(x)dx - \int_3^5 f(x)dx$	
$\int_0^3 f(x)dx + \left\lvert \int_3^5 f(x)dx \right\rvert$	

Aufgabe 12:

Der Graph der in der Abbildung dargestellten Funktion f schließt mit der x-Achse im 1. Quadranten ein Flächenstück ein. Der Inhalt A dieses Flächenstücks kann mit dem Ausdruck $f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + f(x_4)\cdot\Delta x$ näherungsweise berechnet werden.



Geben Sie die geometrische Bedeutung der Variable Δx an und beschreiben Sie den Einfluss der Anzahl der Teilintervalle $[x_i; x_{i+1}]$ von $[0; a]$) auf die Genauigkeit des Näherungswertes für den Flächeninhalt A!

Aufgabe 13:

Der Begriff des bestimmten Integrals soll erklärt werden.

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Textbausteine so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

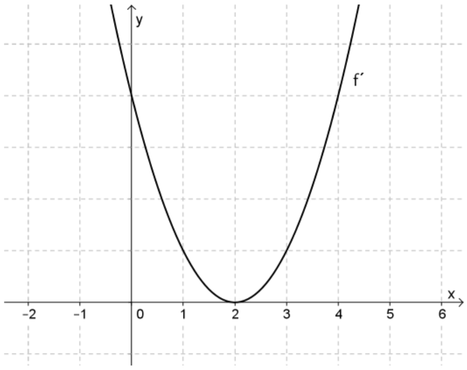
Ein bestimmtes Integral kann als ____①_____ einer/eines ____②_____ gedeutet werden.

①	
Summe	
Produkt	
Grenzwert	

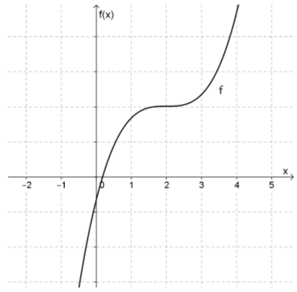
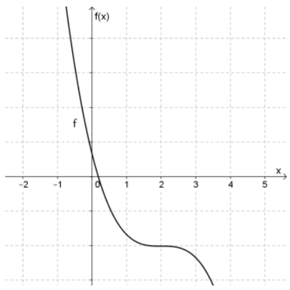
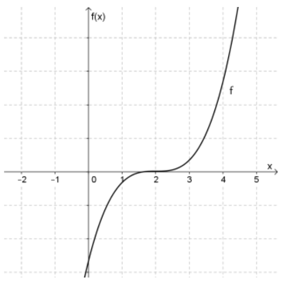
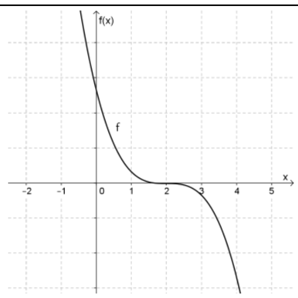
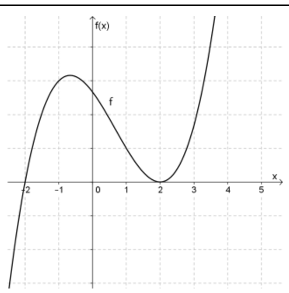
②	
Grenzwertes von Summen	
Summe von Produkten	
Produktes von Grenzwerten	

Aufgabe 14:

Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion f'.



Welche Abbildungen zeigen einen möglichen Graphen der Funktion f ?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Graphen an!

Teil 2

Aufgabe 1:

Der Airbus A380 ist ein vierstrahliges Großraumflugzeug des europäischen Flugzeugherstellers Airbus S. A. S.
Es ist das größte zivile Verkehrsflugzeug, das bisher in Serienfertigung produziert wurde.
Beim Abheben muss das Flugzeug die Gewichtskraft überwinden. Daher muss die Auftriebskraft stärker als die Gewichtskraft sein. Das Flugzeug wird durch die Triebwerke beschleunigt, Luft- und Rollwiderstand wirken dabei bremsend. Die Antriebskraft durch die Turbinen wird durch die Formel $F_A = m \cdot a$ und der Luftwiderstand eines A 380 wird während des Startvorgangs näherungsweise durch die Formel $F_W = 46v^2$ beschrieben, wobei m die Masse (in kg), a die Beschleunigung (in m/s²) und v die Geschwindigkeit (in m/s) des Flugzeugs sind.
Die meisten Flugzeuge beschleunigen in der Horizontalen, bis sie ihre Abhebegeschwindigkeit erreicht haben.
Beim A380 beträgt die Abhebegeschwindigkeit 270 km/h.
Die Geschwindigkeit v des A380 beim Startvorgang kann näherungsweise durch die Funktion $v(t) = 2{,}2t - 0{,}01t^2$ beschrieben werden, wobei t in Sekunden und v in m/s angegeben wird.

A a) Berechnen Sie die Beschleunigung des A380 am Beginn des Startvorgangs ($t = 0$)!
Begründen Sie, warum im verwendeten Modell die mittlere Beschleunigung während des Startvorgangs gleich groß ist wie die Momentanbeschleunigung zur Hälfte des Startvorgangs! 2 P

b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den der A380 beim Startvorgang bis zum Abheben zurücklegt! 2 P

A c) Beschreiben Sie den Luftwiderstand während des Startvorgangs durch eine Funktion F_W in Abhängigkeit von der Zeit t und berechnen Sie die mittlere Änderungsrate des Luftwiderstands während der ersten 40 s des Startvorgangs! 2 P

Aufgabe 2:

Mithilfe der Integralrechnung können unter anderem auch Rauminhalte von Körpern bzw. Fassungsvermögen von Gefäßen berechnet werden.

Unabhängig von der Form des Körpers kann für die Berechnung des Volumens immer der Ansatz $V = \int_{h_1}^{h_2} A(h)dh$

verwendet werden, wobei $A(h)$ der Inhalt der Querschnittsfläche des Körpers in der Höhe h (bzw. bei der Länge h) ist.

In der Tabelle sind fünf Körper dargestellt: Ein Fass (A), zwei Vasen (B und C), ein Brückenpfeiler (D) und eine Tube (E). Die abgebildeten Körper besitzen folgende Querschnittsflächen (in alphabetischer Reihenfolge): Ellipse, Kreis (zweimal), Quadrat, Rechteck.

A	B	C	D	E
				

A a) Das Integral $V = \int_{h_1}^{h_2} A(h)dh$ kann als unendliche Summe von Produkten interpretiert werden.

Geben Sie eine geometrische Deutung des Faktors dh und des Produktes $A(h)dh$ an!

Ordnen Sie jeder Querschnittsfläche den/die Buchstaben des entsprechenden Körpers zu! 2 P

Ellipse: ____ Kreis: ______ Quadrat: ____ Rechteck: ____

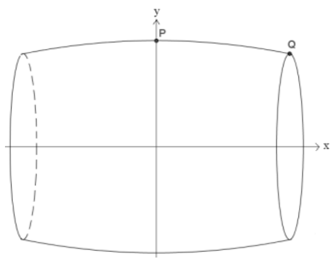
b) Die äußere Form von Vase C soll durch Rotation des Graphen einer Polynomfunktion $f : x \mapsto f(x)$ um eine seiner beiden Koordinatenachsen modelliert werden.

Um welche Koordinatenachse muss die Rotation erfolgen und wie müsste diese in Abbildung C eingezeichnet werden? Begründen Sie Ihre Antwort!

Begründen Sie, welchen Grad *f* mindestens besitzen muss! 2 P

c) Das (liegende) Fass A kann durch Rotation einer Parabel $y = a \cdot x^2 + b$ um die *x*-Achse modelliert werden.

Das stehende Fass ist 1 m hoch, besitzt einen Boden- und Deckeldurchmesser von 50 cm und in halber Höhe einen Durchmesser von 70 cm.



Bestimmen Sie die Parameter *a* und *b*, wenn als Maßeinheit dm verwendet werden!

Berechnen Sie das Fassungsvermögen des Fasses <u>in Liter</u>! 3 P

d) Interpretieren Sie für Körper B die Lösung h_1 der Gleichung $A'(h) = 0$. 1 P