Prototypische Schularbeit 2 – Klasse 8

Autor: Mag. Paul Schranz

Begleittext

- Die vorliegende Schularbeit behandelt größtenteils Grundkompetenzen der Inhaltsbereiche Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung der 8. Klasse. Weiters werden zur Wiederholung Grundkompetenzen aus den Inhaltsbereichen funktionale Abhängigkeit, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik der vorangegangenen Jahre überprüft.
- Darüber hinaus werden „weitere Lehrplaninhalte", also solche, die nicht im Bifie-Grundkompetenzkatalog angeführt sind, abgeprüft. Hierbei seien vor allem das Volumsintegral und der Hypothesentest erwähnt.
- Eine Auflistung der abgeprüften Inhalte findet sich bei den jeweiligen Aufgabenstellungen.
- Der Einsatz von Technologie erleichtert das Lösen der Teil 2 – Aufgaben erheblich.
- Grundsätzlich wurde Bedacht darauf gelegt, den Empfehlungen zur Durchführung von Mathematikschularbeiten der Landesschulräte zu entsprechen.
- Aufgabe B im Teil 2 beinhaltet bewusst Items die als „herkömmlich" bezeichnet werden können.

Arbeitszeit und Hilfsmittel:

Teil 1: 50 min, Teil 2: 50 min

Alle im Unterricht üblichen Hilfsmittel sind zugelassen.

Beurteilung:

- Es gibt insgesamt 14 Grundkompetenzpunkte: Je einen für jede der 12 Teil-1-Aufgaben und jede der beiden mit A gekennzeichnete Aufgaben aus Teil 2.
- Für eine positive Beurteilung sind mindestens 8 dieser Grundkompetenzpunkte erforderlich
- Für positive Schularbeiten gilt der folgende Beurteilungsschlüssel:

Genügend	8 – 11 Punkte
Befriedigend	12 – 16 Punkte
Gut	17 – 20 Punkte
Sehr Gut	21 – 24 Punkte

Teil 1

Aufgabe 1: AN 3.1.

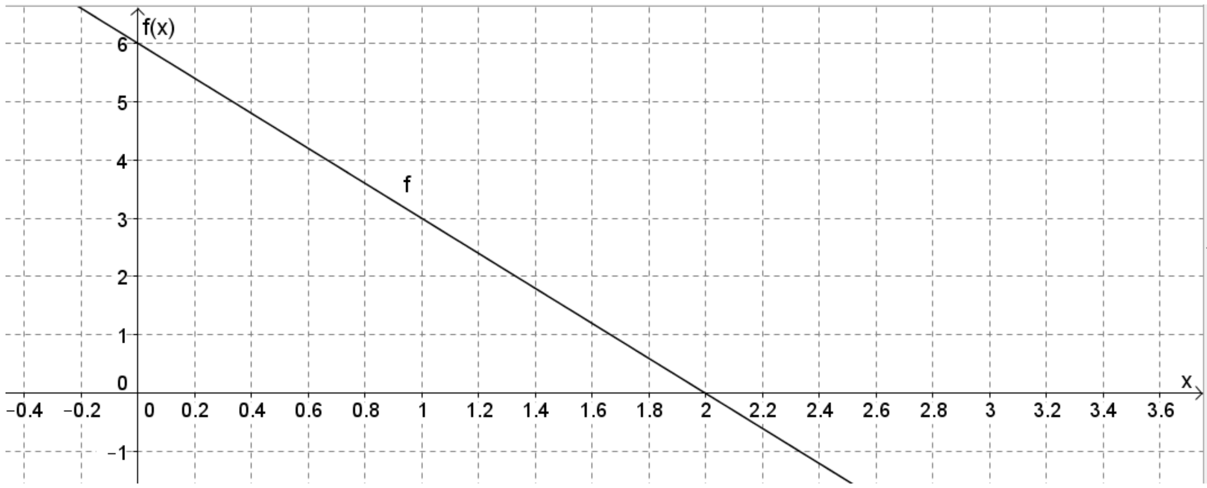
Die Beschleunigung *a* eines bewegten Objektes in Abhängigkeit der Zeit *t* kann durch die Funktionsgleichung $a(t) = 3 \cdot t$ beschrieben werden. Das Objekt hatte zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit v_0.

Geben Sie die Gleichung einer Funktion *v* an, welche die Geschwindigkeit des Objektes in Abhängigkeit der Zeit beschreibt!

$v(t) =$ ____

Aufgabe 2: AN 3.2.

Gegeben ist der Graph einer linearen Funktion *f*. Zeichnen Sie den Graphen einer Stammfunktion von *f* in das gegebene Koordinatensystem ein!



Aufgabe 3: AN 4.3.

Gegeben ist eine Funktion *f* mit der Gleichung $y = a^2 - x^2, a \in \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion *f* schließt mit den positiven Koordinatenachsen ein Flächenstück *A* ein.

Geben Sie einen Term zur Berechnung des Inhalts dieses Flächenstücks an!

$A =$ ____

Aufgabe 4: AN 1.4.

Die Höhe einer Pflanze nimmt in einem gewissen Zeitraum um 4 % pro Woche zu.

x_n beschreibt die Höhe der Pflanze nach n Wochen. Stellen Sie eine Differenzengleichung auf, welche die Entwicklung der Höhe dieser Pflanze beschreibt.

$x_0 = 20$

$x_{n+1} - x_n =$ ____

Aufgabe 5: AN 4.2.

f ist eine reelle Funktion und *a* eine reelle Zahl.

Kreuzen Sie die beiden richtigen Gleichungen an!

$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$	
$\int f(a \cdot x)dx = \int f(a)dx \cdot \int f(x)dx$	
$\int \big(a + f(x)\big)dx = \int a dx + \int f(x)dx$	
$\int f(a + x)dx = \int f(a)dx + \int f(x)dx$	
$\int f(x)^2 dx = \frac{f(x)^3}{3} + c$	

Aufgabe 6: AN 4.3. + weitere Lehrplaninhalte

Gegeben ist die Gleichung einer Polynomfunktion *f*: $f(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)$.

Das vom Graphen der Funktion *f* und der *x*-Achse eingeschlossene Flächenstück rotiert um die *x*-Achse. Geben Sie einen Term zur Berechnung des dadurch entstehenden Rotationsvolumens *V* an!

V = ____

Aufgabe 7: WS 1.1. (WH)

Die folgende Tabelle beschreibt Monatsgehälter der Angestellten in einem Betrieb.

	Männer	Frauen
höchstens 2500 €	34	53
mehr als 2500 €	58	22

Berechnen Sie den Männeranteil *p* (in %) in der Gruppe der Angestellten, die mehr als 2500 € verdient!

p = ____

Aufgabe 8: WS 1.4. (WH)

In einer Schulklasse wurden die Körpergrößen der Burschen ermittelt. Dabei ergab sich folgende geordnete Urliste: (Angaben in cm)

165	165	166	166	166	168	169	169	170	191

Beschreibt in diesem Fall der Median oder das arithmetische Mittel die mittlere Körpergröße der Burschen besser? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 9: WS 3.1.

Bei einem Glücksspiel kostete ein Los 3 €. Es wurden 400 Lose aufgelegt und verkauft. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die möglichen <u>Auszahlungen</u>.

Anzahl der Lose	Auszahlung in € pro Los
1	300
2	200
3	100

Berechnen Sie den <u>Erwartungswert *E* des Gewinns</u> pro Los aus der Sicht des Spielers!

E = ____

Aufgabe 10: WS 3.2. (WH)

Durch die Volkszählung weiß man, dass *p* % der Einwohner einer Großstadt älter als 40 Jahre sind.

Für eine Befragung werden zufällig 20 Personen dieser Stadt ausgewählt.

Welche der folgenden Terme beschreiben die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen 20 Personen mindestens 2 Personen älter als 40 Jahre sind? Kreuzen Sie die beiden richtigen Terme an!

$\binom{20}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{18}$	
$1-\left(\binom{20}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{20} + \binom{20}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{19}\right)$	
$\binom{40}{20} \cdot p^{20} \cdot (1-p)^{20}$	
$\binom{20}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{18} + \binom{20}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{17} + \ldots\ldots + \binom{20}{20} \cdot p^{20} \cdot (1-p)^0$	
$1-\left(\binom{20}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{20} + \binom{20}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{19} + \binom{20}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{18}\right)$	

Aufgabe 11: weitere Lehrplaninhalte

Die Füllmenge einer Chipspackung ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 210$ g und Standardabweichung $\sigma = 10$ g.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit *P* an, dass die Füllmenge mindestens 200 g beträgt!

P = ____

Aufgabe 12: WS 4.1.

In einer repräsentativen Stichprobe von *n* = 500 Personen gaben 120 Personen an, sie würden die Partei A wählen.

Geben Sie ein 95 %-Konfidenzintervall *KI* für den Wähleranteil der Partei A an!

KI = ____

Teil 2

Aufgabe A: Zungenrollen

Unter dem “Zungenrollen“ versteht man die Fähigkeit, die Zunge röhrenartig zu rollen. Dazu müssen die Zungenränder hochgewölbt werden. Diese Fähigkeit ist weit verbreitet.
In Mitteleuropa können 72 % der Menschen die Zunge rollen. Diese werden im Weiteren als „Zungenroller“ bezeichnet.

a. **A:** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter drei zufällig ausgewählten Mitteleuropäern mindestens ein Zungenroller befindet! Begründen Sie verbal, warum für diese Berechnung die Binomialverteilung zugrunde gelegt werden kann! (2P)

b. In einer Stichprobe von 20 Personen befanden sich nur 13 Zungenroller. Kann durch dieses Ergebnis die Hypothese *„Der Anteil der Zungenroller in Mitteleuropa ist geringer als 72%.“* mit einer Signifikanz von 5 % bestätigt werden? Begründen Sie Ihre verbale Antwort durch eine Berechnung! (2P)

c. In einer Stadt leben 5500 Einwohner. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Anzahl der Zungenroller.
Bestimmen Sie das Intervall $[\mu - a, \mu + a]$, in welchem die Anzahl der Zungenroller dieser Stadt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt! (2P)

d. Für eine hinreichend große Population kann die Anzahl *X* der Zungenroller durch die Normalverteilung beschrieben werden. Der Graph der Verteilungsdichte von *X* ist durch eine Glockenkurve gegeben. Beschreiben Sie, wie sich der Verlauf dieses Graphen ändert, wenn bei gleichem Erwartungswert die Standardabweichung größer wird! (1P)

Aufgabe B: (Innermathematisch, Technologieeinsatz von Vorteil)

Gegeben ist die Gleichung einer Polynomfunktion f: $f(x) = 0{,}2 \cdot (x+3) \cdot (x-2) \cdot (x-4)$.
Die quadratische Funktion g mit der Gleichung $g(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt den Scheitelpunkt $S = (0|2)$. Der Graph von g verläuft durch den Punkt $P = (2|6)$.

a. **A:** Der Graph der Funktion f schließt mit der positiven x-Achse ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks! (1P)

b. Wie würde sich eine Vergrößerung des Faktors 0,2 bei der Gleichung der Funktion f auf die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossene Fläche auswirken? Begründen Sie Ihre Antwort verbal! (1P)

c. Die Graphen der beiden Funktionen f und g begrenzen zwei Flächenstücke. Die beiden Graphen schneiden sich in den Punkten $A = (a_1|a_2)$, $B = (b_1|b_2)$ und $C = (c_1|c_2)$ mit $a_1 < b_1 < c_1$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g und geben Sie einen Term zur Berechnung des Inhaltes des kleineren Flächenstücks an! (2P)

d. Deuten Sie das Ergebnis der Berechnung $\pi \cdot \int_2^5 \frac{g(x)-b}{a}\,dy$ geometrisch! (1P)

GK – Verteilung Teil 2:

Aufgabe A:

a. WS 3.2.
b. WS 3.4. + weitere Lehrplaninhalte WK
c. WS 3.4. + weitere Lehrplaninhalte WK
d. Anmerkung bei WS 3.4. + weitere Lehrplaninhalte von WK und AN

Aufgabe B:

a. AN 4.3. + FA 4.3.
b. AN 4.3. + FA 4.1. + FA 4.3.
c. FA 3.2. + AN 4.3.
d. AN 4.3. + weitere Lehrplaninhalte AN